CLASE 12. Las Funciones Analíticas

Definición 12.1 (Derivada de una función compleja)**.** Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Sea z_0 un punto fijo en $\mathcal{D}$ y sea f una función compleja, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f tiene derivada en el punto (o también, que es derivable en) $z_0 \in \mathcal{D}$ si existe el siguiente límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En este caso, el número definido por este límite, denotado $f'(z_0)$, se llamará la derivada de la función f en el punto z_0. Escribimos

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{\substack{h=z-z_0 \\ \downarrow}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

La función f se dice analítica en $\mathcal{D}$ si f es derivable en todo punto de $\mathcal{D}$. A veces se dice que f es analítica en el punto z_0 si f es analítica en un entorno de z_0 (es decir, si es analítica en un disco abierto que contiene al punto).

PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Las propiedades y las reglas formales para derivar funciones complejas son similares a las conocidas que se aplican a funciones de variable real. Así escribimos las siguientes propiedades:

1. Si f es derivable en el punto z_0, entonces f es continua en z_0.

   La demostración es igual que en el caso real. El recíproco, al igual que en el caso real, no es cierto. Por ejemplo, la función $f(z) = |z|^2$ es continua en todo punto de $\mathbb{C}$, mientras que f sólo es derivable en el origen. ¿Puedes probarlo?

2. Si las funciones f y g son analíticas en $\mathcal{D}$, entonces las funciones $f \pm g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ (siempre que $g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D}$) son analíticas en $\mathcal{D}$ y, más aún, cumplen

   - $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
   - $(fg)' = f'g + fg'$.
   - $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2} \quad (g(z) \neq 0 \text{ en } \mathcal{D})$.

- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (si $g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D}$).

  Usando la definición de derivada fácilmente se prueba:

3. La función f es derivable en el punto z_0 si y sólo si f satisface una ecuación de la forma

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)\,[k + \lambda(z)]\,,$$

donde k es una constante (compleja) y $\lambda(z)$ es una función (compleja) que cumple

$$\lim_{z \to z_0} \lambda(z) = 0.$$

Claramente, $k = f'(z_0)$.

4. Usando (3) se puede probar (igual que en el caso real) la siguiente regla de la cadena:

   Sean $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}$. Si f y g son funciones analíticas, entonces la compuesta $h(z) = (g \circ f)(z) = g(f(z))$ es analítica (en $\mathcal{D}$) y la derivada está dada por

$$h'(z) = g'(f(z))\,f'(z).$$

12.1 Condiciones de Cauchy-Riemann

Consideremos una función $w = f(z), f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Escribiendo $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (siga este vínculo si desea recordar el significado de las partes real e imaginaria, u y v, respectivamente, de una función compleja) y denotando las derivadas parciales de las funciones u y v por u_x , u_y , v_x y v_y, podemos probar:

Teorema 12.2 (Condiciones de Cauchy-Riemann)**.** *Si la función f es analítica en $\mathcal{D}$ entonces las cuatro derivadas parciales u_x , u_y , v_x y v_y existen y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

en cada punto de $\mathcal{D}$.

Prueba. Para demostrarlo fijamos un punto $z_0 \in \mathcal{D}$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Como $f'(z_0)$ existe, entonces el siguiente límite existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y es independiente de la trayectoria (recuerde que el límite es único).

Calculamos este límite en dos direcciones diferentes. Primero a lo largo de la línea paralela al eje real, pasando por el punto $y = y_0$. Así,[1] $\Delta z = z - z_0 = x - x_0 = \Delta x$. Sustituyendo

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Como $f'(z_0)$ existe, entonces las derivadas parciales u_x , v_x existen (en el punto z_0) y, además,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0). \tag{2}$$

Análogamente tomando la recta $x = x_0$ paralela al eje de las ordenadas (el eje imaginario) se tiene que $\Delta z = z - z_0 = i(y - y_0)$. Sustituyendo

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{3}$$

Luego, las derivadas parciales u_y , v_y existen (en el punto z_0) y

$$f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \tag{4}$$

Al existir $f'(z_0)$, entonces de (2) y (4), se obtiene la forma compleja de las condiciones (o ecuaciones) de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{5}$$

Igualando partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Como z_0 era cualquier punto (fijo) de $\mathcal{D}$, la demostración es válida para todo punto de $\mathcal{D}$. $\square$

[1] En lo que sigue, $\Delta(z)$ denotará a $z - z_0$ (que es lo que habíamos denotado h); $\Delta(x)$ y $\Delta(y)$ serán, respectivamente, las partes real e imaginaria de $\Delta(z)$. En otras palabras, $\Delta(z) = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \Delta(x) + i\Delta(y)$.

***Observación* 12.3.** El teorema anterior es útil para descartar la analiticidad de funciones. Considere, por ejemplo, $f(z) = |z|^2$. Para ésta función es claro que $u(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = 0$, por lo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ sólo pueden cumplirse para $x = 0 = y$. Luego, f es analítica en ningún punto, ni siquiera en $z = 0$ (puesto que ésto implicaría el cumplimiento de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo un disco que contiene a $z = 0$).

***Observación* 12.4.** El recíproco del teorema anterior no es cierto. Para ello, considere la función

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = 0 \\ u(x,y) + iv(x,y) & \text{si } z \neq 0, \end{cases}$$

siendo $u(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ y $v(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

Para esta función existen las cuatro derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ y, sin embargo, f no es derivable en $z = 0$ (¡demuéstrelo!).

***Observación* 12.5.** En la demostración del teorema anterior se vió (ecuaciones (2) y (4)) que si una función f es derivable en z_0, entonces su derivada (en el punto z_0) se puede calcular mediante

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

o, también, mediante

$$f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

Sólo enunciaremos el siguiente:

Teorema 12.6 (Cauchy-Riemann). *La función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es analítica en $\mathcal{D}$ si y sólo si las cuatro derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y existen, son continuas y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

en todo punto de $\mathcal{D}$.

***Corolario* 12.7.** La función $f(z) = e^z$ es analítica en todo el plano complejo y su derivada es ella misma, es decir,

$$f'(z) = e^z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Prueba. De $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ obtenemos que $u(x,y) = e^x \cos y$ y $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Luego,

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \quad &;& \quad u_y = -e^x \operatorname{sen} y \\ v_x &= e^x \operatorname{sen} y \quad &;& \quad v_y = e^x \cos y, \end{aligned}$$

mostrando que u_x , u_y , v_x y v_y existen, son continuas y además cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathcal{D}$. Luego, por el Teorema 12.6 concluimos que $f(z) = e^z$ es analítica en todo $\mathbb{C}$. Ahora, por la Observación 12.5, se cumple

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x e^{iy} = e^z \quad \forall\, z \in \mathcal{D}.$$

□

***Corolario* 12.8.** Las funciones $\operatorname{sen}(z)$, $\cos(z)$, $\operatorname{senh}(z)$ y $\cosh(z)$ son analíticas en todo $\mathbb{C}$ y sus derivadas vienen dadas por

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen})'(z) &= \cos(z) \quad &,& \quad (\cos)'(z) = -\operatorname{sen}(z) \\ (\operatorname{senh})'(z) &= \cosh(z) \quad &,& \quad (\cosh)'(z) = \operatorname{senh}(z). \end{aligned}$$

***Observación* 12.9.** En la última demostración se vió que, en forma compleja, las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan de la siguiente manera

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y},$$

ya que $\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x = v_y - iu_y = -i[u_y + iv_y] = -i\frac{\partial f}{\partial y}$.

Definición 12.10 (Curva poligonal). Una curva poligonal (o también sendero) es una sucesión (finita) de curvas $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ donde cada curva σ_i es de clase $\mathcal{C}^1$ y tales que el punto final de σ_j es igual al punto inicial de σ_{j+1} (para $j = 1, 2, \ldots, n-1$). Esto significa que, si σ_j está definida en el intervalo $[a_j, b_j]$, entonces $\sigma_j(b_j) = \sigma_{j+1}(a_j)$ (para j como antes)). A $\sigma_1(a_1)$ lo llamaremos el punto inicial de σ mientras que $\sigma_n(b_n)$ será el punto final de σ.

La curva poligonal σ se dice que está *contenida en un conjunto abierto* $\mathcal{V}$ si cada curva $\sigma_j \subset \mathcal{V}$, es decir, si para cada $t \in [a_j, b_j]$, el punto $\sigma_j(t) \in \mathcal{V}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Definición 12.11 (Conjunto Conexo). Un conjunto abierto $\mathcal{D}$ se dice conexo si para cada par de puntos $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$ existe una curva poligonal $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ en $\mathcal{D}$ tal que α es el punto inicial de σ_1 y β es el punto final de σ_n, es decir, si existe un sendero en $\mathcal{D}$ que una α con β.

A los conjuntos que no son conexos se les llama disconexos (compare las figuras 1 y 2).

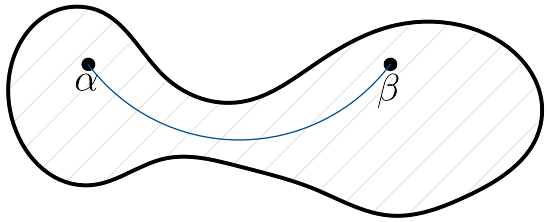

Figura 1: Un conjunto conexo.

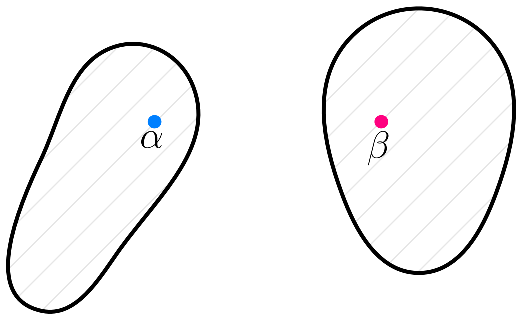

Figura 2: Un conjunto disconexo.

Definición 12.12 (Dominio). Llamaremos a $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un dominio si es un conjunto abierto y conexo.

De aquí en adelante, los conjuntos $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ que aparezcan como dominios de definición de funciones $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ serán *dominios*.

Teorema 12.13. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio (como en la definición anterior) y sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Si $f'(z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathcal{D}$ entonces f es constante.*

Prueba. La demostración se puede hacer sin recurrir a las condiciones de Cauchy-Riemann[2], simplemente usando la definición de curva poligonal y la regla de la cadena, ya que

$$\frac{\mathrm{d}f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t} = f'(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0,$$

lo que implica que la función $f(\sigma(t))$ es constante. Luego, tomando un sendero σ que una a puntos arbitrarios α, β de $\mathcal{D}$, $\alpha = \sigma_1(a)$, $\beta = \sigma_n(b)$, $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, denotando $z_i \in \mathcal{D}$

[2] La demostración del teorema, usando las condiciones de Cauchy-Riemann, sería así: Por la Observación 12.5, si $f'(z_0) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}$ entonces $u_x = v_x = 0$ y también $u_y = v_y = 0$ en todo $\mathcal{D}$. De $u_x = u_y = 0$ (y de $v_x = v_y = 0$) obtenemos que u es constante (real) c_1 (y v es constante c_2) en todo $\mathcal{D}$, y, por tanto, $f(z) = c_1 + ic_2 \quad \forall z \in \mathcal{D}$. Note que, en esta demostración, no hace falta pedir que $\mathcal{D}$ sea conexo.

los puntos finales de σ_i (para $i = 2, 3, \ldots, n-1$), se tiene que

$$f(\alpha) = f(z_1) = f(z_2) = \cdots = f(\beta),$$

siendo α, β (y $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$) arbitrarios.

Así, f es constante en $\mathcal{D}$. □

12.2 Las Funciones Armónicas

Definición 12.14 (Función Armónica)**.** Una función real $u = u(x, y)$ se dice armónica en $\mathcal{D}$ si para todo punto (x, y) en $\mathcal{D}$, las derivadas parciales segundas u_{xx} y u_{yy} existen, son continuas y, además, satisfacen la *ecuación diferencial de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

El siguiente teorema nos relaciona la clase de las funciones armónicas con las funciones analíticas.

Teorema 12.15. *Si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathcal{D}$ entonces las funciones u y v son armónicas en $\mathcal{D}$.*

Prueba. Por ser f analítica en $\mathcal{D}$, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathcal{D}$:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Derivando la primera ecuación respecto a x y la segunda respecto a y, se obtiene

$$u_{xx} = v_{yx} \qquad \text{y} \qquad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Más adelante veremos que la derivada de una función analítica es, de nuevo, analítica. En consecuencia, las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son de clase $\mathcal{C}^2$ (más aún, de clase $\mathcal{C}^\infty$) y, por lo tanto, sus derivadas cruzadas son iguales (en particular, $v_{xy} = v_{yx}$). Luego, las ecuaciones anteriores nos arrojan $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Es decir, la parte real de f es armónica.

Finalmente, por ser f analítica, la función $-if(z) = v(x, y) - iu(x, y)$ también es analítica en $\mathcal{D}$, así que $v(x, y)$, que es la parte real de la función analítica $-if(z)$, también es armónica en $\mathcal{D}$. □

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 12.16 (Conjugada Armónica)**.** Si u y v son funciones armónicas en $\mathcal{D}$, $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, tales que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathcal{D}$, se dirá que $v = v(x, y)$ es una conjugada armónica de u.

12.3 Ejemplos

1) Considere la función $u(x, y) = e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y)$. Determine su conjugada armónica $v(x, y)$ y la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

   Solución. Derivando parcialmente es

$$u_x = e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y) + e^x\cos y$$
$$u_y = e^x(-x\,\mathrm{sen}\, y - \mathrm{sen}\, y - y\cos y),$$

   las cuales, gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann (para recordar dichas ecuaciones, siga éste vínculo), $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, se pueden re-escribir como

$$v_y = e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y) + e^x\cos y$$
$$v_x = e^x(x\,\mathrm{sen}\, y + \mathrm{sen}\, y + y\cos y).$$

   Integrando,

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int v_x\,\mathrm{d}x + \varphi(y) \quad (\varphi \text{ es la "constante de integración"}) \\ &= \int (e^x x\,\mathrm{sen}\, y + e^x\,\mathrm{sen}\, y + e^x y\cos y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) \\ &= e^x(x-1)\,\mathrm{sen}\, y + e^x\,\mathrm{sen}\, y + e^x y\cos y + \varphi(y) \\ &= xe^x\,\mathrm{sen}\, y + e^x y\cos y + \varphi(y). \end{aligned}$$

   Derivando respecto a y e igualando a v_y se obtiene que $\varphi'(y) = 0$, es decir, $\varphi(y) = C$ (constante compleja) y así $v(x, y) = e^x(x\,\mathrm{sen}\, y + y\cos y) + C$. Luego,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^x(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y) + ie^x(x\,\mathrm{sen}\, y + y\cos y) \quad (\text{tomamos } C = 0) \\ &= e^x[x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y) + iy(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)] \\ &= e^x[e^{iy}(x + iy)] = e^{x+iy}(x + iy), \end{aligned}$$

es decir,

$$f(z) = z\,e^z.$$

2) Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathbb{C}$. Pruebe que si $\arg(f)$ es constante, entonces f es constante.

Solución. Sean u y v las partes real e imaginaria, respectivamente, de f, $f = u + iv$. Por ser $\tan(\arg f)$ constante, se tiene que $v(x,y) = k\,u(x,y)$, con k constante (compleja).

Si $u \equiv 0$ entonces $u_x = u_y = 0 \overset{\text{Ec. C-R}}{\overset{\downarrow}{=}} v_x = v_y$, y así, es $u = c_1$, $v = c_2$ y $f = c_1 + ic_2$ es constante.

Veamos que f es constante también en el caso $u \not\equiv 0$. Derivando $v(x,y) = k\,u(x,y)$ es $v_x = k\,u_x$ y $v_y = k\,u_y$. Luego, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} u_x = k\,u_y \\ u_y = -k\,u_x. \end{cases}$$

Luego, $u_x + k^2 u_x = 0$, es decir, $(1+k^2)u_x = 0$, lo cual implica que $u_x = 0$. Del mismo modo, $u_y = 0$ y, gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_x = 0 = v_y$. Por tanto, $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$ y $f = c_1 + ic_2 = c$, es decir f es constante.

3) Muestre que la función $\operatorname{Log} z$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto en los puntos del semieje real negativo y en cero.

Solución. El valor principal del logaritmo es $w = f(z) = \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, donde $z \neq 0$ y $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$. Suponemos que las funciones u y v se expresan en coordenadas polares (r,θ) y que las derivadas parciales u_r, u_θ, v_r, v_θ son continuas. Aquí $u = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ y $v = \operatorname{Arg} z = \theta$.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares serían

$$u_r = \frac{1}{r} v_r$$
$$v_r = -\frac{1}{r} u_\theta,$$

ecuaciones que satisfacen nuestras funciones u y v.

La derivada de una función analítica, usando coordenadas polares es

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)w_r \quad \text{(¡Demuéstralo!)}$$

y así

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{Log} z)}{\mathrm{d}z} = (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)}{r}\right) = \frac{1}{r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} = \frac{1}{z}.$$

Luego, la función $\operatorname{Log} z$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto los puntos del eje real negativo y el cero (ver (11.7)).[3]

4) Obtenga el dominio donde la función $f(z) = \operatorname{Log}(z^2+1)$ es analítica.

Solución. Por el ejemplo anterior, f será analítica en $\mathbb{C}$ excepto donde z^2+1 sea real no positivo. De

$$z^2+1 = (x+iy)^2+1 = (x^2-y^2+1)+i(2xy),$$

se tiene que f es analítica en $\mathbb{C}$ excepto donde $xy=0$ y $x^2-y^2+1 \leq 0$. Resolviendo, $x=0$ implica que $-y^2+1 \leq 0$, es decir, $1 \leq y^2$ (equivalentemente, $1 \leq |y|$).

Por otra parte, $y=0$ implica $x^2+1 \leq 0$, lo que es absurdo. Así, podemos concluir que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re}(z)=0,\ 1 \leq |\operatorname{Im}(z)|\}$, que corresponde a la figura 3.

[3] Usando la regla de la cadena (propiedad 4), es muy fácil probar, sin usar coordenadas polares, que en los puntos donde $\operatorname{Log}(z)$ es derivable, su derivada viene dada por $\frac{1}{z}$ (puede "repetir" la prueba vista en matemáticas 1). Lo difícil es demostrar que $\operatorname{Log}(z)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ salvo en el semieje real no-negativo.

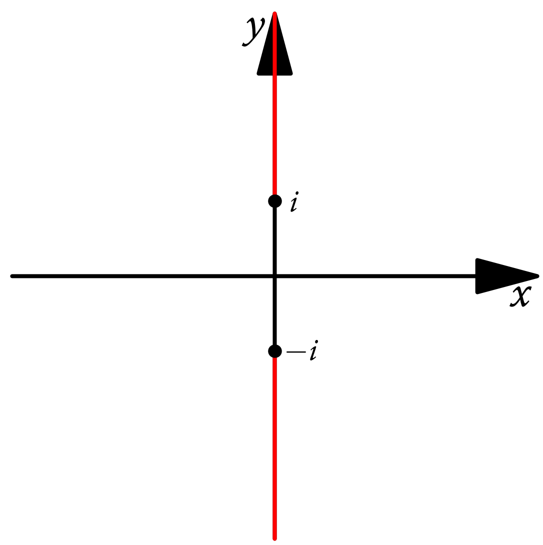

Figura 3: Dominio de Analiticidad de $\mathrm{Log}(z^2 + 1)$.